Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix}4\\1\\-1\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

   a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ ist.

   b) Man bestimme eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von U bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$.
   Hinweis: Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren um eine ONB (=Orthonormalbasis) zu konstruieren. Den Vektor b_1 erhalten Sie, indem Sie v_1 normieren. Wenden Sie danach sukzessive das Gram-Schmidt Verfahren an. Als Kontrolle ist es auch hilfreich, am Ende der Rechnung zu überprüfen, dass die Vektoren b_1, b_2 und b_3 tatsächlich orthogonal zueinander sind und Norm 1 besitzen.

   c) Man stelle v_4 als Linearkombination von b_1, b_2, b_3 dar.
   Hinweis: Benutzen Sie Lemma 9.19.
   Hinweis zu dieser Aufgabe: In dieser Aufgabe wird die Konstruktion einer Orthonormalbasis behandelt. Die in der Aufgabe verwendeten Methoden lassen sich geometrisch sehr schön herleiten und begründen. Lassen Sie sich bei Unklarheiten von den Tutoren helfen.

2. Gegeben seien s und $t \in \mathbb{R}$ mit $s^2 < t$ sowie $A = \begin{pmatrix}1 & s\\ s & t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   a) Man zeige, daß σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.
   Hinweis: Lassen Sie sich nicht von den zwei Parametern s und t abschrecken!

   b) Man bestimme eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \sigma_A)$.
   Hinweis: Starten Sie mit einer Basis des $\mathbb{R}^2$ und wenden Sie anschließend das Gram-Schmidt Verfahren an. Sinnvoll ist es, als Basis e_1 und e_2 zu wählen. Normieren Sie zuerst e_1 (Beachten Sie, dass $\|e_1\|^2 = \sigma_A(e_1, e_1)$ gilt!). und wenden Sie dann das Gram-Schmidt Verfahren auf den Vektor e_2 an.

3. *nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000*

   Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei die Bilinearform

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

   gegeben. Laut Aufgabe 2, 8.Übungsblatt stellt diese Bilinearform ein Skalarprodukt dar. Konstruieren Sie eine bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonale Basis für den Unterraum

$$U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

4. *Nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2010*

   Der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standard–Skalarprodukt versehen. Der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^4$ werde durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   aufgespannt. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von U mit $b_1 \in \operatorname{span}\{v_1\}$ und $b_2 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.
   Hinweis:
   Die Forderung $b_1 \in \operatorname{span}\{v_1\}$ verät Ihnen schon, wie b_1 gewählt werden muss. Wenden Sie wieder das Gram-Schmidt Verfahren an.